Curve equivalenti e parametrizzazioni

Curve equivalenti

Definizione 1. Diciamo che le curve

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad \sigma : [A, B] \to \mathbb{R}^n$$

sono equivalenti, se esiste una funzione $g : [a, b] \to [A, B]$ di classe $C^1([a, b])$ tale che

$$g(a) = A, \quad g(b) = B, \quad \gamma = \sigma \circ g \qquad \text{e} \qquad g' > 0 \ \text{ su } \ [a, b].$$

Osservazione 2. *Supponiamo che le curve*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad \sigma : [A, B] \to \mathbb{R}^n$$

sono equivalenti e di classe C^1. Supponiamo inoltre che

$$|\sigma'(T)| \neq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad T \in [A, B].$$

Sia X un punto del sostegno delle curve σ e γ e siano

$$t \in [a, b] \qquad e \qquad T \in [A, B]$$

tali che $T = g(t)$ e

$$\gamma(t) = \sigma(T) = X.$$

Allora σ e γ hanno lo stesso vettore tangente nel punto X. Infatti,

$$\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{\sigma'(g(t))g'(t)}{|\sigma'(g(t))g'(t)|} = \frac{\sigma'(T)}{|\sigma'(T)|}\frac{g'(t)}{|g'(t)|} = \frac{\sigma'(T)}{|\sigma'(T)|},$$

dove abbiamo usato che $g'(t) > 0$.

Osservazione 3. *Supponiamo che le curve*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad \sigma : [A, B] \to \mathbb{R}^n$$

siano equivalenti e di classe C^1. Allora σ e γ hanno la stessa lunghezza. Infatti, se $g : [a, b] \to [A, B]$ e la funzione continua, invertibile e C^1 tale che

$$g'(t) > 0 \qquad e \qquad \gamma(t) = \sigma(g(t)) \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in [a, b],$$

allora

$$\begin{aligned} \text{lunghezza}\,(\gamma) &= \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \\ &= \int_a^b \big|\sigma'(g(t))\,g'(t)\big|\,dt \\ &= \int_A^B \big|\sigma'(s)\big|\,ds = \text{lunghezza}\,(\sigma), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la nuova variabile $s = g(t)$.

Parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco

Definizione 4. Sia $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}$ una curva di classe C^1. Diremo che σ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco se
$$\int_a^t |\sigma'(s)|\,ds = t - a \qquad \text{per ogni} \qquad t \in [a,b].$$

Esempio 5. *La curva*
$$\sigma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ , \qquad \sigma(t) = \big(\cos t, \sin t\big)$$
è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Infatti, per ogni $T \in [0,2\pi]$, si ha
$$\int_0^T |\sigma'(t)|\,dt = \int_0^T \big|\big(-\sin t\,,\,\cos t\big)\big|\,dt = \int_0^T \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,dt = \int_0^T 1\,dt = T.$$

Teorema 6. *Sia $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 tale che*
$$|\sigma'(t)| \neq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in [a,b].$$
Allora, esiste una curva γ, equivalente a σ, di classe C^1 e parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

Dimostrazione: Sia $L > 0$ la lunghezza della curva σ
$$L = \int_a^b |\sigma'(s)|\,ds.$$
Inoltre, per ogni $t \in [a,b]$, definiamo
$$\ell(t) = \int_a^t |\sigma'(s)|\,ds.$$
Osserviamo che $\ell(a) = 0$, $\ell(b) = L$ e che
$$\ell : [a,b] \to [0,L]$$
è una funzione continua e derivabile su $[a,b]$ con derivata
$$\ell'(t) = |\sigma'(t)| > 0 \qquad \text{per ogni} \qquad t \in [a,b].$$
Di conseguenza, ℓ è invertibile e la sua inversa
$$g : [0,L] \to [a,b],$$
è una funzione continua e derivabile su $[0,L]$, con derivata continua data da
$$g'(s) = \frac{1}{\ell'(g(s))} = \frac{1}{|\sigma'(g(s))|} \qquad \text{per ogni} \qquad s \in [0,L].$$
Definiamo la curva
$$\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n \ , \qquad \gamma(s) = \sigma(g(s))$$
e osserviamo che per ogni $s \in [0,L]$ si ha che
$$|\gamma'(s)| = |\sigma'(g(s))|\,|g'(s)| = |\sigma'(g(s))| \frac{1}{|\sigma'(g(s))|} = 1.$$
Di conseguenza,
$$\int_0^\ell |\gamma'(s)|\,ds = \int_0^\ell 1\,ds = \ell \quad \text{per ogni} \quad \ell \in [0,L],$$
il che conclude la dimostrazione. $\square$